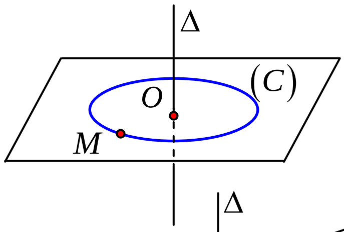
MẶT NÓN. MẶT TRỤ. MẶT CẦU

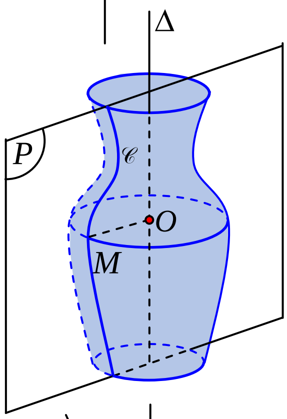
Vấn đề 1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY. HÌNH NÓN. MẶT NÓN. KHỐI NÓN

I. Khái niệm về mặt tròn xoay



1. Trục của đường tròn $(O;R)$: là đường thẳng đi qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn.
2. Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và một đường $\mathscr{C}$. Khi quay mặt phẳng (P) quanh Δ một góc $360°$ thì mỗi điểm M trên $\mathscr{C}$ vạch ra một đường tròn có tâm O thuộc Δ và nằm trên mặt phẳng vuông góc với Δ. Như vậy khi quay mặt phẳng (P) quanh đường thẳng Δ thì $\mathscr{C}$ sẽ tạo nên được một hình gọi là ***mặt tròn xoay***.

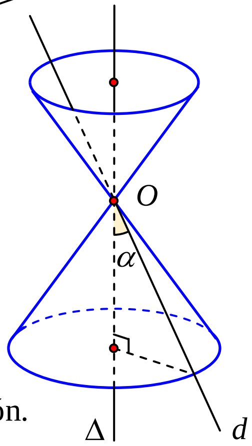
   Trong đó: đường $\mathscr{C}$ được gọi là ***đường sinh***; đường thẳng Δ được gọi là ***trục*** của mặt tròn xoay.



II. Mặt nón – Hình nón – Khối nón

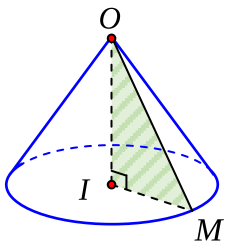
1. Định nghĩa mặt nón:

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo thành góc α (với $0° < \alpha < 90°$). Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là ***mặt nón tròn xoay*** đỉnh O. Gọi tắt là ***mặt nón***.

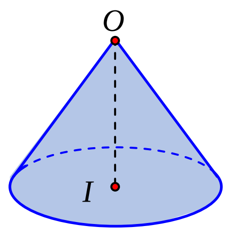


- Δ gọi là ***trục*** của mặt nón.
- d gọi là ***đường sinh*** của mặt nón.
- O gọi là ***đỉnh*** của mặt nón.
- Nếu gọi α là góc giữa d và Δ thì 2α gọi là ***góc ở đỉnh*** của mặt nón.

2. Hình nón tròn xoay:



- Cho ΔIOM vuông tại I. Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh vuông góc OI thì đường gấp khúc IOM tạo thành một hình được gọi là ***hình nón tròn xoay***, gọi tắt là ***hình nón***.
- Trong đó
  - ✓ Hình tròn tâm I sinh bởi các điểm thuộc cạnh IM khi IM quay quanh trục OI được gọi là ***mặt đáy*** của mình nón.
  - ✓ Điểm O được gọi là ***đỉnh*** của hình nón.
  - ✓ Độ dài đoạn OI được gọi là ***chiều cao*** của hình nón.
  - ✓ Độ dài đoạn OM được gọi là độ dài ***đường sinh*** của hình nón.
  - ✓ Phần mặt tròn xoay sinh bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh OI được gọi là ***mặt xung quanh*** của hình nón.



3. Khối nón tròn xoay:

- Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó được gọi là ***khối nón tròn xoay*** hay còn gọi tắt là ***khối nón***.
- Trong đó:
  - ✓ Điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón gọi là ***điểm trong*** của khối nón.
  - ✓ Ta gọi đỉnh, mặt đáy, đường sinh của hình nón theo thứ tự là đỉnh, mặt đáy, đường

sinh của khối nón tương ứng.

4. **Diện tích hình nón và thể tích khối nón:**

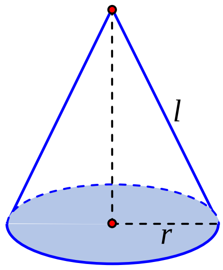
   a. Định nghĩa:

   - **Diện tích xung quanh** của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.
   - **Thể tích của khối nón**: là giới hạn của thể tích của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

   b. Công thức:

   Gọi r là bán kính đường tròn đáy; l là độ dài đường sinh; h là chiều cao; B là diện tích đáy của hình nón.

   - *Diện tích xung quanh:* $\boxed{S_{xq} = \pi r l}$
   - *Diện tích toàn phần:* $\boxed{S_{tp} = S_{đáy} + S_{xq} = \pi r^2 + \pi r l}$
   - *Thể tích của khối nón:* $\boxed{V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$



5. **Hình nón cụt :**

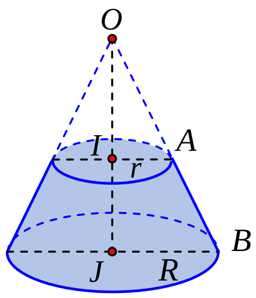
   a. Định nghĩa:

   Hình nón cụt là phần nón giới hạn bởi mặt đáy và một thiết diện song song với đáy.

   b. Công thức:

   - Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{xq} = \pi(R + r)l}$.
   - Diện tích toàn phần: $\boxed{S_{tp} = S_{2đáy} + S_{xq} = \pi(r^2 + R^2) + \pi(R + r)l}$
   - Thể tích khối nón cụt: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)}$.

   Trong đó: R, r là bán kính hai đáy; $h = IJ$ là độ cao hình nón cụt.



Dạng 1. Tính toán cơ bản của hình nón: đường sinh, bán kính đáy, chiều cao, góc ở đỉnh, diện tích, thể tích

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. ***Hình nón:***

   ✓ *Chiều cao:* $SO = h$

   ✓ *Đường sinh:* $SM = l$

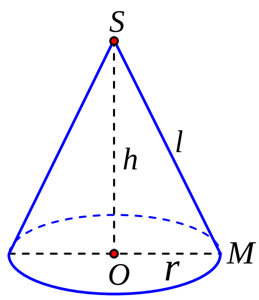
   ✓ *Góc ở đỉnh:* $MSN = 2\alpha$

   ✓ *Bán kính đáy r thì:* $l^2 = r^2 + h^2$

   ✓ *Diện tích xung quanh:* $S_{xq} = \pi r l$

   ✓ *Diện tích toàn phần:* $S_{tp} = S_{đáy} + S_{xq} = \pi r^2 + \pi r l$

   ✓ *Thể tích:* $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

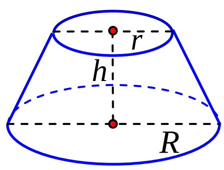


2. ***Hình nón cụt:***

   ✓ *Diện tích xung quanh:* $S_{xq} = \pi(R + r)l$

   ✓ *Diện tích toàn phần:* $S_{tp} = S_{2đáy} + S_{xq} = \pi(r^2 + R^2) + \pi(R + r)l$

   ✓ *Thể tích:* $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3a$ và $AC = 4a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC.

Ví dụ 3: a) Một hình nón có đường kính đáy bằng 2 và chiều cao bằng $\frac{4}{3}$. Kí hiệu góc ở đỉnh của hình nón là 2α. Tính α.

b) Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có diện tích xung quanh bằng 8π. Tính chiều cao của hình nón này.

c) Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính bằng a. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho.

d) Tính thể tích của một khối nón có góc ở đỉnh là $90°$, bán kính hình tròn đáy là a?

e) Một hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích của hình nón bằng 9π. Tính đường cao h của hình nón.

Ví dụ 4: Trong không gian cho ΔOIM vuông tại I, góc $IOM = 30°$ và $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay đó.

b) Tính thể tích của khối nón tròn xoay được tạo bởi hình nón tròn xoay nói trên.

Ví dụ 5: Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3\text{cm}$ và đường sinh $l = 5\text{cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b) Tính thể tích của khối nón tương ứng.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong khi quay quanh đường thẳng BC).

Ví dụ 7: Các bán kính đáy của một hình nón cụt lần lượt là a và $3a$, đường sinh là $2{,}9a$. Tính thể tích khối nón cụt đó.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3\text{cm}$ và đường cao $h = 4\text{cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b) Tính thể tích của khối nón tương ứng.

Bài 2. Cho tam giác SAB đều cạnh a, O là trung điểm của AB, quay tam giác SAB quanh cạnh SO được hình nón.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b) Tính thể tích của khối nón tương ứng.

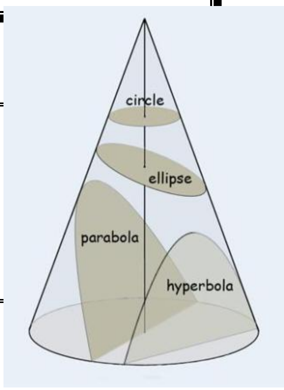
Dạng 2. Thiết diện với hình nón

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng (P). Nếu:

1. Mặt phẳng (P) không qua đỉnh thì thiết diện là:

✓ *Một **elip** nếu (P) cắt tất cả các đường sinh. Đặc biệt nếu (P)*



*vuông góc với trục của mặt nón thì thiết diện là **đường tròn**.*

- ✓ *Một đường **Parabol** nếu (P) song song với chỉ một đường sinh.*
- ✓ *Một đường **Hypebol** nếu (P) song song với hai đường sinh.*

2. Mặt phẳng (P) qua đỉnh thì thiết diện là:

- ✓ *Tam giác cân tại đỉnh của hình nón nếu (P) cắt mặt nón theo 2 đường sinh*
- ✓ *Mặt tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh.*

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 8: Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

b) Tính thể tích của khối nón được tạo thành bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm. Tính diện tích thiết diện đó.

Ví dụ 9: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.

Ví dụ 10: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy hình nón một góc $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

Ví dụ 11: Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

b) Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính diện tích thiết diện được tạo nên.

Ví dụ 12: Một hình nón tròn xoay có đỉnh là D, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng l và có góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng α.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo nên.

b) Gọi I là một điểm trên đường cao DO của hình nón sao cho $\frac{DI}{DO} = k$ $(0 < k < l)$. Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 40\text{cm}$, bán kính đáy $r = 50\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 24cm. Tính diện tích của thiết diện.

Bài 4. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

Bài 5. Cho khối nón đỉnh O, trục OI. Mặt phẳng trung trực của OI chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần.

Bài 6. Cho khối nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm I của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh I lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?

Bài 7. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h=a$ và bán kính đáy $r=2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

Dạng 3. Nội tiếp – Ngoại tiếp hình chóp

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. *Một hình nón gọi là **nội tiếp** một hình chóp nếu hình nón tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp.*
2. *Một hình nón gọi là **ngoại tiếp** một hình chóp nếu đường tròn đáy của hình nón là đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình chóp và đỉnh của hình nón là đỉnh hình chóp.*

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 13: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và đường cao bằng $6a$. Tính thể tích khối nón nội tiếp hình chóp đó.

Ví dụ 14: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và đường cao bằng $6a$. Tính thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp đó.

Ví dụ 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Một hình nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$.
a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.
b) Khi đó thể tích khối nón tương ứng.

Ví dụ 16: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, một hình nón tròn xoay có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.
a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đó
b) Tính thể tích khối nón tương ứng.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Tích diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay và thể tích khối nón ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a.

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

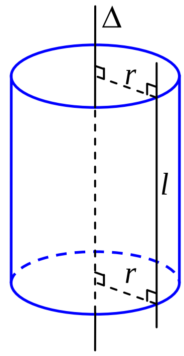
Bài 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính thể tích khối nón có đỉnh là tâm hình vuông $ABCD$ và có đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

Bài 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $45°$. Diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là S, có đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

Vấn đề 2. HÌNH TRỤ. MẶT TRỤ. KHỐI TRỤ

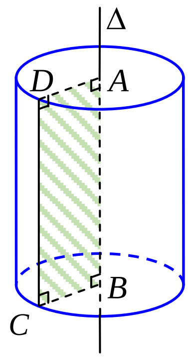
1. Mặt trụ tròn xoay:

Trong mp (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay (P) xung quanh Δ thì l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là **mặt trụ tròn xoay**. Δ gọi là trục, l gọi là đường sinh, r là bán kính của mặt trụ đó.



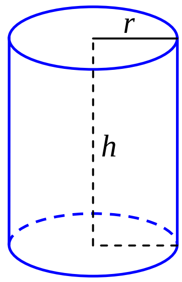
2. Hình trụ tròn xoay:

Xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa 1 cạnh, chẳng hạn AB, thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành 1 hình được gọi là **hình trụ tròn xoay**.



- Hai đáy là hai hình tròn: tâm A bán kính $r = AD$ và tâm B bán kính $r = BC$.
- Đường sinh: đoạn CD.
- Mặt xung quanh: là mặt do đoạn CD tạo thành khi quay, nếu cắt theo một đường sinh và trải ra ta được mặt xung quanh là một hình chữ nhật.
- Chiều cao: $h = AB = CD$.

3. Khối trụ tròn xoay: Phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó được gọi là **khối trụ tròn xoay.**



4. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ:

- Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$
- Diện tích toàn phần: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$
- Thể tích khối trụ: $\boxed{V = Bh = \pi r^2 h}$

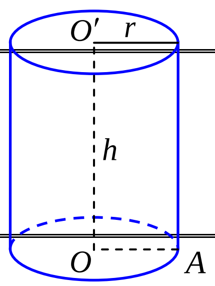
Dạng 1. Tính toán cơ bản của hình trụ: chiều cao (đường sinh), bán kính đáy, diện tích, thể tích

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

✓ *Chiều cao:* $OO' = h$

✓ *Bán kính đáy:* $r = OA$

✓ *Diện tích xung quanh:* $S_{xq} = 2\pi rh$



✓ *Diện tích toàn phần:* $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

✓ *Thể tích:* $V = S_{đáy}.h = \pi r^2 h$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 17: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ:

a) có bán kính đường tròn đáy $r = a$ và chiều cao $h = a\sqrt{3}$.

b) có chiều cao bằng 2 và thể tích bằng 8π.

Ví dụ 18: Tính thể tích V của khối trụ tròn xoay

a) có bán kính đáy bằng R và diện tích toàn phần bằng $8\pi R^2$.

b) có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

c) có chiều cao bằng bán kính đáy và diện tích xung quanh bằng 2π.

d) có đường kính đáy bằng $2a$, đường sinh bằng $3a$.

Ví dụ 19: Trong không gian, cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tòn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay đó.

b) Tích thể tích khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

Ví dụ 20: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' và có chiều cao bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A sao cho AO' hợp với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần hình trụ theo a.

Ví dụ 21: Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

Ví dụ 22: Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc $45°$. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần hình trụ theo a.

Ví dụ 23: Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn (O, R) và (O', R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ đều và $mp(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần hình trụ theo R.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$, $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó?

Bài 13. Một hình vuông $ABCD$. Cho hình vuông đó quay quanh trục AB và trục AC được tạo thành các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tính tỉ số $k = \dfrac{V_1}{V_2}$.

Bài 14. Cho hình vuông $ABCD$ biết cạnh bằng a. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay khi cho hình vuông $ABCD$ quay quanh IK một góc $360°$.

Bài 15. Cho hình trụ có bán kính đáy và chiều cao có độ dài bằng nhau. Hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy (các cạnh AD, BC không phải là đường sinh của hình trụ). Tính độ dài bán kính đáy và chiều cao của hình trụ biết rằng cạnh hình vuông có độ dài bằng a.

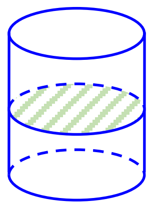
Bài 16. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = a$, $AC = 2a$. Tính theo a độ dài đường sinh l của hình trụ, nhận được khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục AB.

Bài 17. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

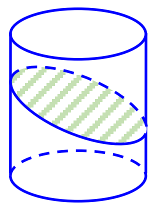
Dạng 2. Thiết diện với mặt trụ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

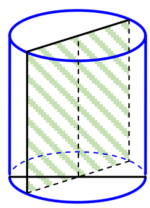
- Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ **vuông góc** với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.



- Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ **không vuông góc** với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elip có trụ nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin\varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0° < \varphi < 90°$.



- Cho $mp(\alpha)$ **song song** với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng k:
  - ✓ Nếu $k < r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh $\Rightarrow$ thiết diện là hình chữ nhật.
  - ✓ Nếu $k = r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.
  - ✓ Nếu $k > r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.
  - ✓ Cho $mp(\alpha)$ **qua** trục Δ của mặt trụ tròn xoay thì thiết diện là hình chữ nhật.



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 24: Cho hình trụ có hình tròn đáy bán kính là $r = a$, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần hình trụ theo a.

Ví dụ 25: Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và có khoảng cách giữa hai đáy bằng 7cm.
a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.
b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

Ví dụ 26: Một khối trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh là $3a$. Tính diện tích toàn phần khối trụ và thể tích khối trụ.

Ví dụ 27: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a, mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $6a^2$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

Ví dụ 28: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục của nó là một hình vuông. Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

Ví dụ 29: Hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng $10a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

Ví dụ 30: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AD = 6$ và góc CAD bằng $60°$. Thể tích của khối trụ là

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $R\sqrt{3}$. Cho hai điểm A và B' lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB' và trục của hình trụ bằng $30°$. Một mặt phẳng (P) chứa AB' và song song với tục của hình trụ.

a) Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Tính góc giữa hai bán kính đi qua A và B'.

c) Tính khoảng cách giữa AB' và trục hình trụ.

Bài 19. Cho hình trụ có trục OO' , bán kính đáy R và chiều cao h. Một điểm M cố định cách trục của hình trụ một khoảng bằng $2R$. Qua M dựng hai mặt phẳng (α) và (β) tiếp xúc với mặt trụ theo các đường sinh AA' và BB'. Gọi d là giao tuyến của (α) và (β). Chứng minh:

a) d vuông góc với đáy của hình thụ..

b) Mặt phẳng (AA', BB') vuông gócc với mặt phẳng $(OO'M)$.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (α), (β) và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (AA', BB') cắt hình trụ.

Dạng 3. Nội tiếp – Ngoại tiếp

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. *Hình trụ nội tiếp hình lăng trụ là hình trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hai đa giác đáy của hình lăng trụ.*
2. *Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ là hình trụ có hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy của hình lăng trụ.*
3. *Hình nón nội tiếp hình trụ là hình nón có đáy là đáy hình trụ và đỉnh trùng với tâm của đáy còn lại của hình trụ.*

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 31: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tính S.

Ví dụ 32: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện.

Ví dụ 33: Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $3a$ và có hai đáy là hai tam giác nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ (τ). Tính thể tích khối trụ (τ).

Ví dụ 34: Cho hình trụ có hai đường tròn đáy lần lượt là (O), (O'). Biết thể tích khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (O') là a^3, tính thể tích khối trụ đã cho?

Ví dụ 35: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O,R) và (O',R); $OO'=a\sqrt{3}$ Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn (O,R). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $AD=\sqrt{2}$ quay quanh đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

Bài 21. Một hình trụ có hai đường tròn đáy nội tiếp hai mặt của hình lập phương cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối trụ đó.

Bài 22. Cho một khối lăng trụ tam giác đều có thể tích là $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đó.

Bài 23. Cho hình lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.

Bài 24. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=R\sqrt{2}$. Xét hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;R)$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

Bài 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

Bài 26. Mặt phẳng đi qua trục của một hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $2R$.
a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.
b) Tính thể tích khối trụ.
c) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác nội tiếp hình trụ.

Dạng 4. Một số bài toán vận dụng thực tế

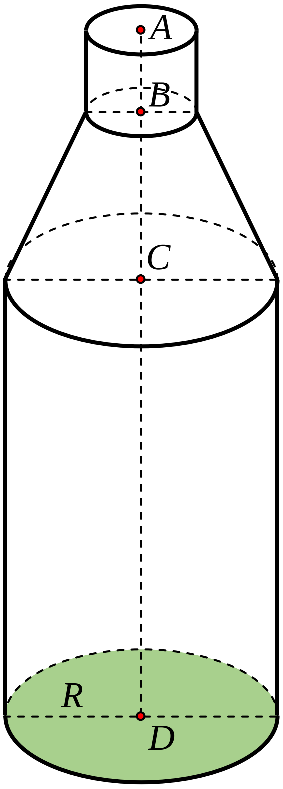
A. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 36: Bên trong một lon sữa hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao và bằng 1dm . Thể tích thực của lon sữa đó bằng .

Ví dụ 37: Một người có một dãi duy băng độ dài $180(\text{cm})$. Người đó cần bọc dãi duy băng đó đi quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà người này dùng $20(\text{cm})$ để thắt nơ trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dãi duy băng đó có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Ví dụ 38: Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp, có thể tích là $64\pi\left(\text{m}^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN



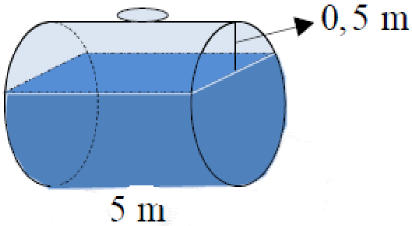
Bài 27. Một thùng xách nước hình trụ có chiều cao 4dm, đường kính đáy 2dm. Người ta dùng các thùng này để xách nước đổ vào một cái bể hình lập phương cạnh $1,5\text{m}$. Giả sử mỗi lần xách đều đầy nước trong thùng và khi đổ 100 thùng thì được 90% thể tích bể. Hỏi ban đầu số lít nước có trong bể là bao nhiêu ?

Bài 28. Người ta bỏ 12 quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 12 lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

Bài 29. Một công ty dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài 1km, đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng 1m; độ dày của lớp bê tông bằng 10cm. Biết rằng cứ một khối bê tông phải dùng 10 bao xi măng. Số bao xi măng công ty phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước gần đúng với số nào nhất?

Bài 30. Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R=5\text{cm}$, bán kính cổ $r=2\text{cm}$, $AB=3\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, $CD=16\text{cm}$. Tính thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó.

Bài 31. Một bồn trụ đang chứa dầu được đặt nằm ngang có chiều dài bồn là 5m , bán kính đáy 1m. Người ta rút dầu ra trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng của dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3, làm tròn đến ba chữ số thập phân).



BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 2

Bài 32. Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao là $R\sqrt{2}$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ.

Bài 33. Trong không gian cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi I và H là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay.

b) Tính thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ.

Bài 34. Một hình trụ có bán kính R và chiều cao $h = R\sqrt{3}$.

a) Tính S_{xq} và diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay.

b) Tính thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

Bài 35. Cho hình trục có bán kính R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy, các cạnh AD và BC không phải là đường sinh của hình trụ. Tính cạnh của hình vuông đó và cosin của góc giữa hai mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

Bài 36. Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

c) Tính V của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

Bài 37. Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao $R\sqrt{3}$. A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục hình trụ là $30°$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

c) Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

Bài 38. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7cm .

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3cm$. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

Bài 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao $AS = 2a$. $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy, M thuộc SA và $AM = x$. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp $MNPQ$ và đường sinh là MA.

a) Tính diện tích $MNPQ$ theo a và x.

b) Tính thể tích của khối trụ theo a và x.

c) Xác định vị trí của M để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Bài 40. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là (O) và (O').

a) Mặt phẳng qua trục OO' cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ và tính thể tích của khối trụ tương ứng.

b) Mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3cm và cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$; $A, B \in (O)$; $A', B' \in (O')$; $AB = 8\text{cm}$; $BB' = 5\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ và tính thể tích của khối trụ tương ứng.

Bài 41. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $C(O;R)$ và $C'(O';R)$, đường cao $R\sqrt{3}$, $A\in(C)$, $A'\in(C')$, góc hợp bởi AA' và OO' bằng $30°$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ và tính thể tích của khối trụ tương ứng.

b) Tính diện tích thiết diện qua AA' và song song với trục hình trụ

c) Tính góc giữa OA và $O'A'$.

d) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AA' và OO'.

Bài 42. Một cái nồi nấu nước người ta làm dạng hình trụ, chiều cao của nồi là 60cm, diện tích đáy $900\pi\text{cm}^2$. Hỏi người ta cần miếng kim loại hình chữ nhật có kích thước là bao nhiêu để làm thân nồi đó? (bỏ qua kích thước các mép gấp).

Bài 43. Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích 1000cm^3. Tính bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

Bài 44. Một cái tục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm (hình bên). Tính diện tích sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng.

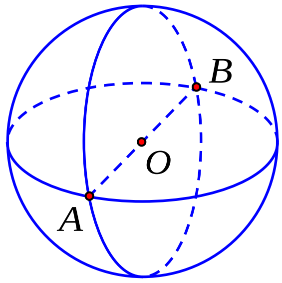
Bài 45. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng:

Bài 46. Một thùng chứa hình trụ kín, có thể tích 5000m^3. Vật liệu để làm hai đáy có giá $250\,000/\text{m}^2$, vật liệu làm phần còn lại có giá $400\,000/\text{m}^2$. Tính chiều cao h và bán kính đáy của thùng chứa để chi phí thấp nhất.

Vấn đề 3. MẶT CẦU. KHỐI CẦU

1. Các định nghĩa

- Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm cố định O một khoảng R không đổi gọi là **mặt cầu** tâm O bán kính R. Kí hiệu: $S(O;R)$
- Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $OM \le R$ gọi là **khối cầu** tâm O bán kính R.



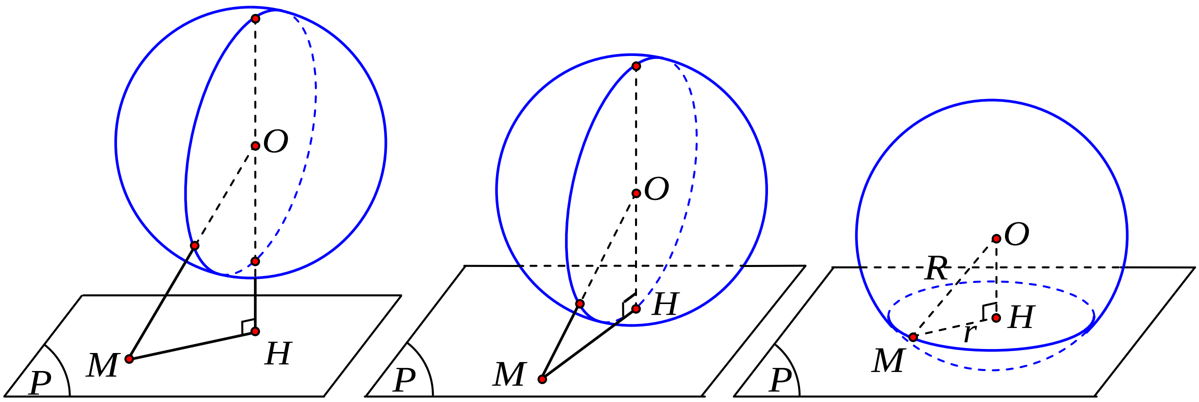
$$\boxed{S(O\,;\,R)=\{M \mid OM=R\}}$$

- Nếu A, B thuộc (S) và AB qua O thì AB gọi là **đường kính** của mặt cầu (S).

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O đến (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Khi đó:

- Nếu $d>R$ thì (P) không cắt mặt cầu.
- Nếu $d=R$ thì (P) **tiếp xúc** với mặt cầu (S) tại H. Ta nói (P) là **tiếp diện** của mặt cầu còn H là **tiếp điểm** của (P) và (S).
- Nếu $d<R$ thì (P) **cắt** (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P) có tâm H và bán kính $\boldsymbol{r=\sqrt{R^2-d^2}}$



Chú ý:

- ✓ Khi $d=R$ thì (P) đi **qua tâm** O của mặt cầu (S) lúc đó ta gọi (P) là **mặt phẳng kính** và giao tuyến là **đường tròn lớn** của mặt cầu.
- ✓ Mặt cầu **đi qua mọi đỉnh** của hình đa diện (H) gọi là mặt cầu **ngoại tiếp** hình đa diện (H) và hình đa diện (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu.
- ✓ Mặt cầu **tiếp xúc với tất cả các mặt** của hình đa diện (H) gọi là mặt cầu **nội tiếp** hình đa diện (H) và hình đa diện (H) được gọi là ngoại tiếp mặt cầu.

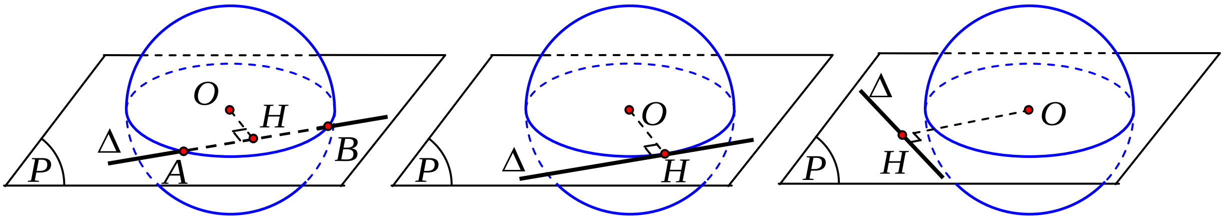
3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ, gọi H là hình chiếu của O trên Δ và $d=OH$. Khi đó:

- Nếu $d<R$ thì Δ **cắt** mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d=R$ thì Δ **tiếp xúc** với mặt cầu (S) tại một điểm, lúc đó Δ gọi là **tiếp tuyến** của mặt cầu

và H gọi là tiếp điểm của mặt cầu.

- Nếu $d > R$ thì Δ **không** cắt mặt cầu.



Chú ý:

✓ Qua một điểm M nằm trên mặt cầu $S(O;R)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu và các tiếp tuyến này cùng nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại M.

✓ Qua một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho. Các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh M.

- **Định lí**: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ thì:

✓ Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu.

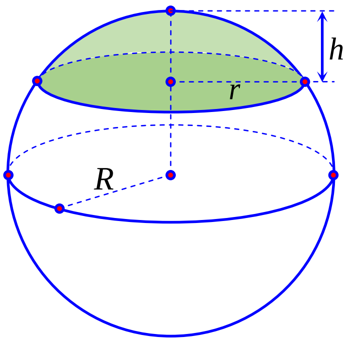
✓ Độ dài nối A với các tiếp điểm bằng nhau và ta thường gọi là **đoạn tiếp tuyến**.

✓ Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

✓ Diện tích mặt cầu $S(O;R)$: $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$

✓ Thể tích khối cầu $S(O;R)$: $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$



5. Diện tích xung quanh và thể tích chỏm cầu:

✓ Diện tích mặt cầu: $\boldsymbol{S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right)}$

✓ Thể tích khối cầu: $\boldsymbol{V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right)}$

Dạng 1. Xác định mặc cầu

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Muốn chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một mặt cầu ta hcusng minh các điểm đó cùng cách đều một điểm O cố định một khoảng $R > 0$ không đổi.

2. Muốn chứng minh một đường thẳng Δ tiếp xúc với một mặt cầu $S(O;R)$ ta chứng minh $d(O,\Delta) = R$.

3. Muốn chứng minh một mặt phẳng (P) tiếp xúc với một mặt cầu $S(O;R)$ ta chứng minh $d(O,(P)) = R$.

4. Tập hợp các điểm M trong không gian nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$. Biết góc giữa SC và đáy bằng $30°$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Ví dụ 40: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$ và cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ theo a.

Ví dụ 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $45°$ và cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ theo a.

Ví dụ 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $SA\perp(ABC)$.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp.

b) Cho $BC=2a$, $ABC=60°$, $SA=a\sqrt{6}$. Tính bán kính của mặt cầu (S) ở trên.

Ví dụ 43: Cho $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Các mặt (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy.

a) Chứng minh SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

b) Tính thể tích của khối chóp. Biết $SA=a$, tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 47. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a và có chiều cao $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Chứng tỏ: O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tính khoảng cách từ O đến (SCD) và khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) theo a.

Bài 48. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các mặt chéo (SAC), (SBD) là tam giác đều. Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, biết $AC=2AB=2a$ và mặt bên SAC là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tìm tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ theo a.

Bài 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc mặt phẳng (SAB). Cho $AB=3a$, $BC=4a$, $AC=5a$, $SA=6a$. Tính bán kính mặt cầu qua S, A, B, C theo a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SC. Tính thể tích khối chóp $MNABC$ theo a.

Bài 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi, cạnh bằng a, $ABC=60°$. Biết $SA=SB=SC=\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a. Chứng tỏ hình chóp $S.ABCD$ không nội tiếp được trong một mặt cầu.

Bài 52. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp trong các trường hợp sau:

a) Có tất cả các cạnh đều bằng a.

b) Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$, cạnh đáy $AB=a$.

c) Cạnh đáy $AB=a$ và góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$.

d) Cạnh bên $SB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$.

e) Cạnh bên $SB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $60°$.

Bài 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $SB \perp (ABC)$.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp.

b) Cho $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$, $SB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính của mặt cầu (S) ở trên.

Bài 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp trong các trường hợp sau:

a) Tất cả các cạnh đều bằng a.

b) $SA = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$, $AB = a$.

c) $SA = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi giữa cạnh bên và mặt đáy là $60°$.

d) $SA = a\sqrt{2}$ và góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$.

d) $AB = 2a$ và góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $60°$.

Bài 55. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, có $AB = 2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $30°$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b) Xác định tâm và tính V mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Dạng 3. Vị trí tương đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

- Nếu $d > R$ thì (P) không cắt mặt cầu.
- Nếu $d = R$ thì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H. Ta nói (P) là tiếp diện của mặt cầu còn H là tiếp điểm của (P) và (S).
- Nếu $d < R$ thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P) có tâm H và bán kính $\boldsymbol{r = \sqrt{R^2 - d^2}}$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

- Nếu $d < R$ thì Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại một điểm, lúc đó Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu và H gọi là tiếp điểm của mặt cầu.
- Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu.

3. Tiếp tuyến của mặt cầu

- Qua một điểm M nằm trên mặt cầu $S(O;R)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu và các tiếp tuyến này cùng nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại M.
- Qua một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho. Các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh M.

Dạng 4. Diện tích mặt cầu – Thể tích khối cầu

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

- Diện tích mặt cầu $S(O;R)$: $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$

- Thể tích khối cầu $S(O;R)$: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

2. Diện tích xung quanh và thể tích chỏm cầu

- Diện tích mặt cầu: $S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right)$
- Thể tích khối cầu: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right)$